

السؤال الأول : (10+10+10+10+10=50 درجة)

1- إذا كان $z = x + iy$ و $|x| < \frac{\sqrt{e}}{4}$ فأثبت أن $|\tan z| < 1$.2- اعتماداً على الدوال العكسية أوجد حلول المعادلة $\sin z = 3$.3- إذا كان $\log z = \text{Log } |z| + i\phi$ ، $|z| > 0$ ، $-\frac{15\pi}{4} < \phi < -\frac{7\pi}{4}$ فأوجد $2\log(-1+i)$ ، $\log(-1+i)^2$ ثم قارن بينهما .4- إذا كان $f(z) = x^3 + i(y+1)^3$ ففي أي النقاط تكون الدالة قابلة للاشتقاق وفي أي النقاط تكون تحليلية .5- إذا كان $u(x,y) = y^2 - x^2 + x + y$ فأثبت أن هذه الدالة توافقية ثم أوجد المرافق التوافقي لها ثم عبر عن الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ بدلالة z .

السؤال الثاني : (10+10+30=50 درجة)

1- أوجد خيال القطعة المستقيمة $0 \leq x \leq 2$ ، $y = 1$ وفق التحويلة $w = z^2$.2- أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_3 = 0, z_2 = \infty, z_1 = -i$ فوق النقاط $w_3 = i, w_2 = -2i, w_1 = \infty$ على الترتيب .

3- أحسب قيمة التكاملين الآتيين

$$I_1 = \int_{|z|=4} \frac{2z-3}{z^3-3z^2+4} dz , \quad I_2 = \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2(z^3+8)} dz$$

مدرس المقرر:

د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الأول : (10+10+10+10+10=50 درجة)

$$1 \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \Rightarrow |\tan z| = \frac{|\sin z|}{|\cos z|} = \frac{\sqrt{\sin^2 x + sh^2 y}}{\sqrt{\cos^2 x + sh^2 y}} \quad - "1 \quad (10)$$

$$1+1+1 \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad sh^2 y = \frac{ch 2y - 1}{2} \quad \text{ولكن}$$

$$1 \quad \text{ومنه فإن} \quad |\tan z| = \sqrt{\frac{ch 2y - \cos 2x}{ch 2y + \cos 2x}} \quad \text{ولكن}$$

$$1+1 \quad |x| < \frac{\pi}{4}, \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos 2x < 1$$

$$1+1 \quad ch 2y - \cos 2x \leq ch 2y, \quad ch 2y + \cos 2x \geq ch 2y \quad \text{أي أن}$$

$$1 \quad \text{فنعين} \quad |\tan z| = \sqrt{\frac{ch 2y - \cos 2x}{ch 2y + \cos 2x}} \leq \sqrt{\frac{ch 2y}{ch 2y}} \leq 1 \quad \text{وهو المطلوب.}$$

$$1+1+2 \quad \sin z = 8 \Rightarrow z = \arcsin 8 = -i \log(i 8 + \sqrt{1-64}) = -i \log(i 8 + \sqrt{-63}) = -"2$$

$$1+1+2 \quad = -i \log(i 8 \pm i 3\sqrt{7}) = -i \log(i (8 \pm 3\sqrt{7})) = -i \left[\text{Log}(8 \pm 3\sqrt{7}) + i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \right] \quad (10)$$

$$2 \quad = \frac{\pi}{2} + 2n\pi - i \text{Log}(8 \pm 3\sqrt{7})$$

$$4 \quad 2 \log(-1+i) = 2 \text{Log} \sqrt{2} - i \frac{13\pi}{2} \quad -"3 \quad (10)$$

$$4 \quad \log(-1+i)^2 = \log -2i = \text{Log} 2 - \frac{5\pi}{2} i$$

$$2 \quad \log(-1+i)^2 \neq 2 \log(-1+i) \quad \text{ونلاحظ أن}$$

$$u(x, y) = x^3, \quad v(x, y) = (y - 1)^3$$

4 - لدينا

(10)

$$1 + 1 + 1 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3(y - 1)^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

ومنه فإن

2 أي أن المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة وشرط كوشي - ريمان الثاني محقق
دوماً وشرط كوشي - ريمان الأول محقق عندما $3x^2 = 3(y - 1)^2$

1 + 1 أي محقق عند نقاط المستقيمين $y = x + 1, y = -x + 1$

3 أي أن الدالة المغطاة قابلة للاشتقاق عند نقاط هذين المستقيمين وبما أن أي جوار
لأية نقطة من نقاط هذين المستقيمين يحتوي على نقاط تكون الدالة المغطاة قابلة
للاشتقاق عند بعضها وغير قابلة للاشتقاق عند بعضها الآخر فالدالة غير تحليلية
عند أية نقطة من نقاط المستوي العقدي .

$$u(x, y) = y^2 - x^2 + x + y$$

5 - بما أن

(10)

$$2 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -2x + 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$$

$$1 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 + 2 = 0$$

ومنه فإن

. والدالة المغطاة توافقية المرافق التوافقي لها نجد اعتماداً على شرط كوشي ريمان

$$1 + 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x + 1 \Rightarrow v(x, y) = -2xy + y + \phi(x) \quad \text{الأول أن}$$

$$1 + 1 + 1 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y + \phi'(x) \Rightarrow -2y + \phi'(x) = -2y - 1 \Rightarrow \phi'(x) = -1 \quad \text{ومنه فإن}$$

$$1 \quad \phi(x) = -x + c \Rightarrow v(x, y) = -2xy + y - x + c \quad \text{أي أن}$$

$$1 \quad f(z) = -z^2 + z - iz + ic = -z^2 + (1 - i)z + ic \quad \text{ومنه فإن}$$

جواب السؤال الثاني : (10+10+15=50 درجة)

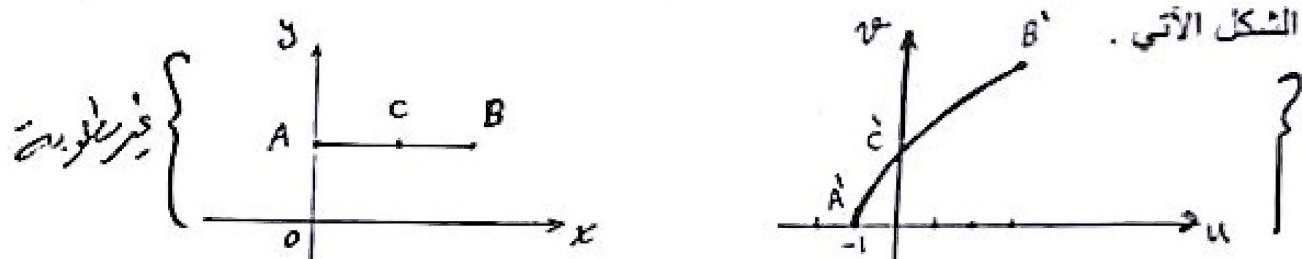
1- بفرض أن $z = x + iy$ $w = u + iv$ عندئذ

2 $u = x^2 - 1, v = 2x$ فإن $y = 1$ من أجل $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ (15)

2 بحذف x من هاتين المعادلتين نجد أن $v^2 = 4(u + 1)$ وهي معادلة قطع مكافئ

2 ثروته النقطة $(-1, 0)$ محور هو المحور الأفقي u وتقعره نحو u^+ خيال النقطة

4 { $A(0, 1)$ فهي النقطة $A'(1, 0)$ و خيال النقطة $B(2, 1)$ فهي النقطة $B'(3, 4)$
وهذه النقطة تقع على القطع السابق أما خيال النقطة $C(1, 1)$ من القطعة المستقيمة
فهي $C'(0, 2)$ وهي أيضا تقع على القطع السابق ويكون خيال القطعة المستقيمة هو
جزء من اللاقطع المصور بين النقطتين A' و B' والمار من النقطة C' كما في



2 - التحويلة المطلوبة من الشكل (15)
$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

نعوض $z_2 = \frac{1}{z_1}, w_1 = \frac{1}{w_1}$ فنجد بعد توحيد المقامات والأختصار أن

2
$$\frac{w_1 w - 1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_1 w_2 - 1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{1 - z_2 z_3}{1 - z_2 z_1}$$

3 $w = -\frac{2iz + 1}{z + i}$ ومنه فإن $\frac{0-1}{w-i} \cdot \frac{-2i-i}{0-1} = \frac{z+i}{z-0} \cdot \frac{1-0}{1-0}$ أي أن

2

3- لحساب قيمة I_1 النقاط الشاذة هي $z_1 = -1$ $z_2 = z_3 = 2$ وهذان النقاط تقع في داخلية الكفاف المغلق المعطى ودرجة البسط أكبر من درجة المقام ب 2 لذلك فإن قيمة التكامل تساوي الصفر أي أن $I_1 = 0$

هنا نستخدم مبرهنة كوشي لحساب I_1 نركز على المعلومات بالشارح
لحساب I_2 النقاط الشاذة هي $z^3 + 8 = 0$ $z_1 = 0$ $z_2 = 1$ جذور المعادلة

1 $z^3 + 8 = 0$ تقع على محيط الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها

$R = 2$ لذلك فإن هذه الجذور تقع في خارجية الكفاف المعطى أما النقطتان

2 $z_1 = 0$ $z_2 = 1$ فتقعان في داخلية الكفاف لذلك نحيط z_1 بدائرة c_1 نصف

2 قطرها صغير بقدر كاف كما نحيط z_2 بدائرة c_2 نصف قطرها صغير بقدر كاف ليكون $c_1 \cap c_2 = \emptyset$ ومنه واعتمادا على مبرهنة كوشي جورسات للمناطق المتعددة

2 الترابط يكون
$$I_2 = \int_{c_1} \frac{e^z (z-1)(z^3+8)}{z} dz + \int_{c_2} \frac{e^z (z-1)(z^3+8)}{(z-1)^2} dz$$

1 + 1
$$I_2 = 2\pi i \left[\frac{e^z}{(z-1)(z^3+8)} \right]_{z=0} + \frac{2\pi i}{1} \left[\frac{e^z}{z(z^3+8)} \right]_{z=1}$$

1 + 2
$$I_2 = \frac{2\pi i}{8} + 2\pi i \left[\frac{2e^{2z} z (z^3+8) - (z^3+8)e^{2z} - 3z^3 e^{2z}}{z^2(z^3+8)^2} \right]_{z=1}$$

2
$$I_2 = \frac{2\pi i}{8} + \frac{12\pi i}{81} = \pi i \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{27} \right) = \pi i \left(\frac{43}{108} \right)$$

مدرس المقرر

د. رامي الشيخ فتوح